ECON 2200,Eksponential og logaritmefunksjoner - handout

Kjell Arne Brekke

April 13, 2012

1 Eksponential og logartimefunksjoner

Eksponentialfunksjonen

Vi har så langt holdt oss til funksjoner bygget opp av potensfunksjoner, som x^2, $\sqrt{x} = x^{1/2}$, eller x^{-3}, eller generelt x^a. Denne funksjonen kan vi så regne ut for envher x og a. Men i stedet for å holde eksponenten fast kan vi holde grunntallet fast og variere eksponenten.

$$f(x) = a^x$$

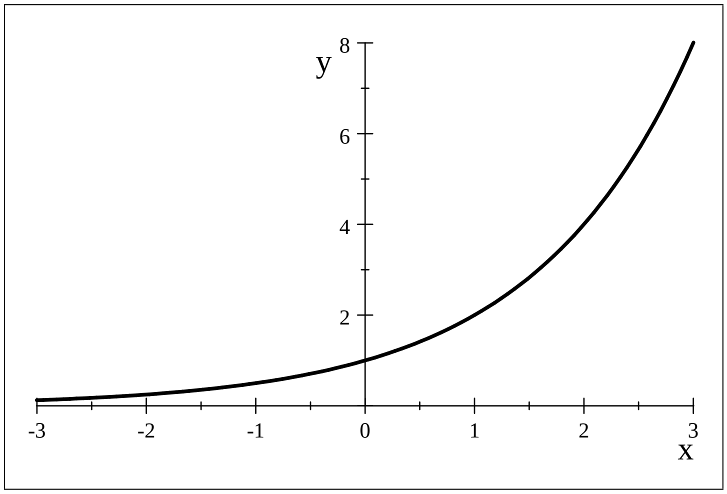
F.eks om vi velger $a = 2$ får vi

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 = 4 \\ f(\frac{1}{2}) &= \sqrt{2} = 1.4142 \\ f(-3) &= \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Oppgave 1 *Regn ut* $f(-2)$

1. $f(-2) = -4$
2. $f(-2) = 1/\sqrt{2}$
3. $f(-2) = 1/4$

Vi kan så plotte funksjonen:



Eksponentialfunksjonen har mange anvendelser.

Vekst:

Om du plasserer 100 kroner på en konto med 10% rente og lar dem stå urørt. Hva står det på kontoen etter 1 år, etter 2 år og etter 3 år

Om befolkningen i et land er X millioner ett år t, og veksten er 1% i året blir de altså $X(1.01)$ millioner året etter:

$$X(1.01) = X + 1\%X \text{ (den opprinnelige befolkningen plus tilveksten)}$$

Etter to år

$$X(1.01)(1.01) = X(1.01)^2$$

og tilsvarende etter t år

$$X(1.01)^t = Xa^t$$

der $a = 1.01$.

Regnereglene for potenser:

$$\begin{aligned} a^x a^y &= a^{x+y} \\ a^x a^{-y} &= a^{x-y} \\ (a^x)^y &= a^{xy} \end{aligned}$$

Den første regelen kan vi lett sjekke i et konkret eksempel:

$$a^3 a^2 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$$

sjekk de to andre reglene i de konkrete tilfellene $a^3 a^{-2}$ og $(a^3)^2$

Den naturlige eksponentialfunksjonen

Den generelle eksponentialfunksjonen er av formen

$$f(x) = a^x$$

men det viser seg at ett bestemt grunntall er mye mer anvendelig enn alle andre, vi skal komme tilbake til hvorfor, men det mest brukte grunntallet er det irrasjonale tallet (dvs tallet kan ikke skrives som en brøk):

$$e \approx 2,718281828459$$

Vi kommer tilbake til valget av akkurat dette grunntallet.

Oppgave 2 *Bruk regnereglene ovenfor til å skrive om uttrykket*

$$(e^x)^2(e^y)^3.$$

Det kan skrive som

1. $(e^x)^2(e^y)^3 = e^{x^2+y^3}$
2. $(e^x)^2(e^y)^3 = e^{2x+3y}$
3. $(e^x)^2(e^y)^3 = e^{2x} + e^{3y}$

Logaritmer

VI har så langt i kurset brukt mye inverse funksjoner. Etterspørselen etter en vare kan vi skrive både som kvantum gitt prisen $q = D(p)$ eller som prisen gitt kvantum $p = P(q)$.

Logaritmen er den inverse av eksponentialfunksjonen, om grunntallet er a skriver vi logaritmen som $\log_a$. Altså: Dersom $y = a^x$ så er $x = \log_a y$

Som dere kanskje husker så er grafene til en funksjon og den inverse, som speilbilder av hverandre speilet om 45-graders linjen gjennom origo. Ovenfor har vi tegnet grafen til 2^x, prøv å bruke dette til å tegne grafen til funksjonen $\log_2 x$

Naturlige logartimer

Vi skal nesten alltid bruke grunntallet er e, altså

$$y = e^x$$

Den inverse funksjonen kalles for naturlig logartime og skrives ln() altså:

$$\text{Dersom } e^x = y \text{ så er } \ln(y) = x$$

eller med andre ord

$$e^{\ln(y)} = y$$

På samme måte blir eksponentialfunksjonen den inverse til ln:

$$\ln(e^x) = x$$

Utfra egenskapene til eksponentialfunksjonen kan vi nå også utlede noen egenskaper til logartimene:

$$e^{\ln(xy)} = xy = e^{\ln(x)}e^{\ln(y)} = e^{\ln(x)+\ln(y)}$$

dvs

$$\ln xy = \ln x + \ln y$$

Oppgave 3 *Prøv på samme måte å vise hva* $\ln \frac{x}{y}$ *blir:*

Det blir: $\ln \frac{x}{y} = \frac{\ln(x)}{\ln(y)}$
Det blir: $\ln \frac{x}{y} = \ln(x) - \ln(y)$
Det blir: $\ln \frac{x}{y} = \ln(x) + \ln(-y)$

Noen verdier

Vi kan bruke

$$\ln e^x = x$$

til å finne $\ln y$ for noen verdier av y

$$\begin{aligned} \ln 1 &= \ln e^0 = 0 \\ \ln 20.086 &\approx \ln e^3 = 3 \end{aligned}$$

Siden $e < 3$ blir $e^2 < 9$ og vi skal se at logaritmefunksjonen er voksende, altså er

$$\ln 9 > \ln e^2 = 2$$

Oppgave 4 *Hva blir* $\ln e$*?*

1. $\ln e = 10$
2. $\ln e = 1$
3. $\ln e = e$

2 Derivasjon (kap 5.10-11)

Som vi skal se har deriverte av eksponentialfunksjonen en spesiell egenskap:

$$\text{dersom } f(x) = e^x \text{ så er } f'(x) = e^x$$

eller med andre ord

$$f'(x) = f(x)$$

For å finne den deriverte trenger vi å regne ut

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Vi starter med

$$f(x+h) - f(x) = e^{x+h} - e^x = e^x e^h - e^x = (e^h - 1)e^x$$

Altså er

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(e^h - 1)}{h} e^x$$

Merk her at første delen av uttrykket ikke avhenger av x og det gjelder da også grenseverdien, som viser seg å være

$$\lim_{h \to 0} \frac{(e^h - 1)}{h} = 1$$

Altså er

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \left(\lim_{h \to 0} \frac{(e^h - 1)}{h} \right) e^x = e^x = f(x)$$

Oppgave 5 *Vi vet at eksponential og logaritmefunksjonene er inverse funksjoner, altså om* $y_0 = e^{x_0}$ *så er* $\ln y_0 = x_0$*. Vi husker at dersom* $y_0 = f(x_0)$ *og* $x_0 = g(y_0)$ *der* f *og* g *er inverse funksjoner, så er*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Bruk denne ligningen og derivasjonsregelen ovenfor (altså $f'(x) = f(x)$*) til å finne* $g'(y_0)$ *når* $g(y) = \ln y$*.*

1. $g'(y_0) = \frac{1}{x_0}$
2. $g'(y_0) = \frac{1}{y_0}$
3. $g'(y_0) = \frac{1}{\ln x_0}$
4. $g'(y_0) = \frac{1}{\ln y_0}$